Mocniny a odmocniny

***s přirozeným exponentem(mocnitelem) tj.* celým a kladným číslem**

- pro každé přirozené $\boldsymbol{n} > \mathbf{1}$ a pro každé reálné číslo $\boldsymbol{a}$ je $\boldsymbol{a^n}$ součin $\boldsymbol{n}$ stejných činitelů čísla $\boldsymbol{a}$,

tj. $$a^n = \underbrace{a.a.a.a.a.........a}_{n}$$

Příklad :

► $2^3 = \underbrace{2.2.2}_{n=3} = 8$ ► $0^5 = 0$

► $(-2)^3 = \underbrace{(-2).(-2).(-2)}_{n=3} = -8$ ► $1^{20} = 1$

► $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \underbrace{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}}_{n=4} = \frac{1}{81}$ ► $(-1)^{86} = \mathbf{1}$ $(-1)^{87} = \mathbf{-1}$

dále je $a^1 = a$ pro každé reálné a $5^0 = 1$

$a^0 = 1$ pro každé reálné $a \neq 0$ $100^0 = 1$

Každé číslo umocněné na nultou je rovno jedné !

Mocniny o stejném základu ***a*** **násobíme** tak , že základ umocníme **součtem exponentů**

$$a^r.a^s = \underbrace{a.a.a...a}_{r}.\underbrace{a.a.a....a}_{s} = \underbrace{a.a.a.a....a}_{r+s} = a^{r+s}$$

Příklad : ► $10^3.10^2 = \underbrace{10.10.10}_{3}.\underbrace{10.10}_{2} = 10^{3+2} = 10^5$

Mocniny o stejném základu ***a*** **dělíme** tak, že základ umocníme **rozdílem exponentů**

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a.a.a...a}^{r}}{\underbrace{a.a....a}_{s}} = a^r : a^s = \underbrace{a.a.a..a}_{r} : \underbrace{a.a...a}_{s} = a^{r-s}$$

Příklad : ► $\frac{10^6}{10^4} = 10^6 : 10^4 = \underbrace{10.10.10.10.10.10}_{6} : \underbrace{10.10.10.10}_{4} = = 10^{6-4} = 10^2$

*Mocninu základu **a** umocníme* tak, že vynásobíme exponenty

$$(a^r)^s = \underbrace{a^r.a^r.a^r....a^r}_{s} = = \underbrace{\underbrace{(a.a...a)}_{r}....\underbrace{(a.a...a)}_{r}}_{s} = \underbrace{a.a.a...a}_{r.s} = a^{r.s}$$

Příklad : $\left(2^3\right)^2 = \underbrace{\underbrace{(2.2.2)}_{3}.\underbrace{(2.2.2)}_{3}}_{2} = \underbrace{2.2.2.2.2.2}_{2.3=6} = 2^{2.3} = 2^6$

se záporným exponentem

základ ***a*** *umocníme záporným exponentem* ***(-k)*** *tak, že převrácenou hodnotu základu* ***a*** *umocníme kladným exponentem* ***(k)***

$$a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{1^k}{a^k} = \frac{1}{a^k}$$ protože

$$a^3 : a^5 = \frac{a.a.a}{a.a.a.a.a} = \frac{1}{a.a} = \frac{1}{a^2}$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$$

Příklad : ► $7^{-2} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1^2}{7^2} = \frac{1}{49}$

► $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

► $\left(\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}\right)^{-1} = \left(\frac{2.4}{5.3}\right)^{-1} = \left(\frac{8}{15}\right)^{-1} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

Mocnina součinu *reálných čísel* ***a , b***

a,b ≠ 0 n = přirozené číslo *Součin umocníme tak, že každého z činitelů umocníme samostatně*

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$(a.b)^n = \underbrace{(a.b).(a.b).....(a.b)}_{n} = \underbrace{a.a.a.....a}_{n}.\underbrace{b.b.b.....b}_{n} = a^n.b^n$$

Příklad : ► $(3.4)^2 = 3^2.4^2 = 9.16$

► $(2.10)^3 = 2^3.10^3 = 8.1000 = 8000$

Mocnina podílu** reálných čísel **a , b

a,b ≠ 0   **n** = přirozené číslo   *Podíl umocníme tak, že dělence i dělitele umocníme samostatně* .

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{n} = \frac{\overbrace{a.a.....a}^{n}}{\underbrace{b.b.....b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Příklad : ►

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

►

$$\left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{2^3}{10^3} = \frac{8}{1000} = 0{,}008$$

Příklady k procvičení: *Výsledek*

a) $a^{-2}.a^3 =$ $\{a\}$

b) $a^5 : a^{-3} =$ $\{a^8\}$

c) $\left(x^{-2}.x^4\right)^{-3} =$ $\{x^{-6}\}$

d) $\left(\frac{3ab}{25x^2y^2}\right)^{-3} : \left(\frac{4a}{5xy^2}\right)^{-3} =$ $\left\{\frac{8000x^3}{27b^3}\right\}$

e) $2^{2n+3}.6^{1-n}.8^n.3^{2n+1} =$ $\{2^{4n+4}.3^{n+2}\}$

f)   První umělá družice Země v r. 1957 měla průměrnou výšku nad Zemí $h = 0{,}59\ .\ 10^6\ m$. Vypočtěte oběžnou dobu podle vztahu $T = \frac{2\pi\left(R+h\right)}{v}$ kde poloměr Země $R = 6{,}37.10^6\ m$ a rychlost družice byla $v = 7{,}5.10^3 m.s^{-1}$ $\{T \doteq 97\,\mathrm{min}\}$

s racionálním exponentem **(v exponentu je zlomek)**

$$a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$$

$$a^r = a^{\frac{rs}{s}} \Leftrightarrow \sqrt[s]{a^{r.s}} = a^r$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r.s} \Leftrightarrow a^r = \sqrt[s]{a^{r.s}}$$

Příklad: ▶ $a^2 = a^{\frac{2}{1}} = a^{\frac{2.2}{2}} = a^{\frac{4}{2}} \Leftrightarrow \sqrt[2]{a^4} = a^2$

▶ $2^2 = 4 = 2^{\frac{4}{2}} = \sqrt[2]{2^4} = \sqrt[2]{2^2.2^2} = \sqrt[2]{16} = 4$

Příklad: ▶ $2^3 = 8^1 \quad <=> \quad 2 = \sqrt[3]{8^1}$

▶ $(7^2)^3 = 7^6 \quad <=> \quad 7^2 = \sqrt[3]{7^6}$

Příklad: ▶ $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

▶ $12^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{12^3}$

▶ $27^{0,2} = 27^{\frac{2}{10}} = 27^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{27}$

$$\sqrt[r]{a.b} = \sqrt[r]{a}.\sqrt[r]{b}$$

Příklad: ▶ $\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{2.6} = \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{6}$

$= \sqrt[3]{3.4} = \sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{4}$

$$\sqrt[r]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}$$

Příklad: ▶ $\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{3}$

$$a.\sqrt[r]{b} = \sqrt[r]{a^r.b}$$

Příklad: ▶ $2.\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3.5} = \sqrt[3]{8.5} = \sqrt[3]{40}$

$$\left(\sqrt[r]{a}\right)^s = \sqrt[r]{a^s}$$

Příklad: ▶ $\left(\sqrt[3]{10}\right)^2 = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$

$$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r.s]{a}$$

Příklad: ▶ $\sqrt[2]{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{16}$

$$\sqrt[r]{a} = \sqrt[r.s]{a^s}$$

Příklad: ▶ $\sqrt[2]{3} = \sqrt[2.3]{3^3} = \sqrt[6]{27}$